BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

Session 2015

Epreuve : MATHÉMATIQUES

Séries : STI2D et STL spécialité SPCL

Durée de l'épreuve : 4 heures
Coefficient : 4

Le sujet comporte 7 pages, numérotées de 1 à 7.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

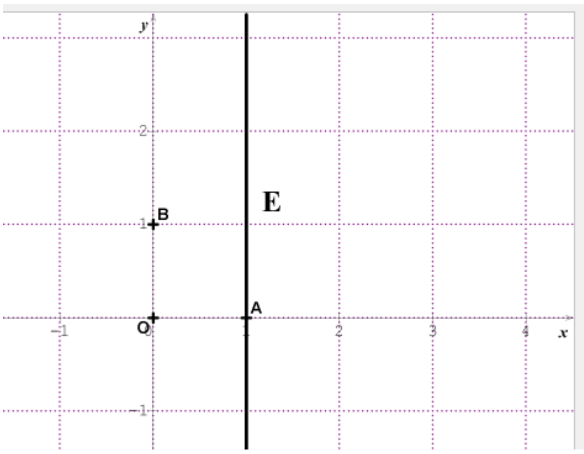
Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur sa copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 : (4 points).

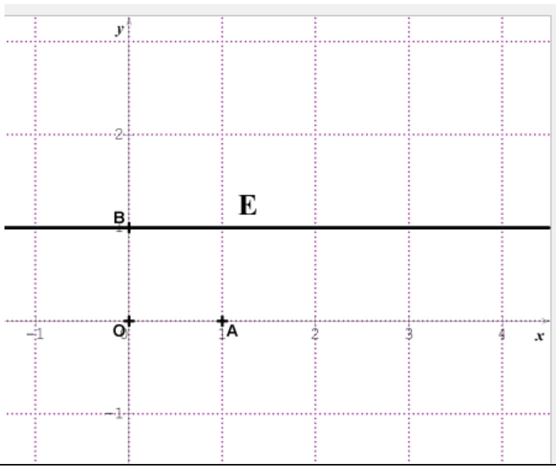
Cet exercice est un Q.C.M.. Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point. Dans cet exercice, on note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
Pour répondre, vous recopierez sur votre copie le numéro de la question et la seule réponse choisie.

1. Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, A, B).
L'ensemble **E** des images des nombres complexes z vérifiant la relation $|z| = 1$ est représenté en gras par :

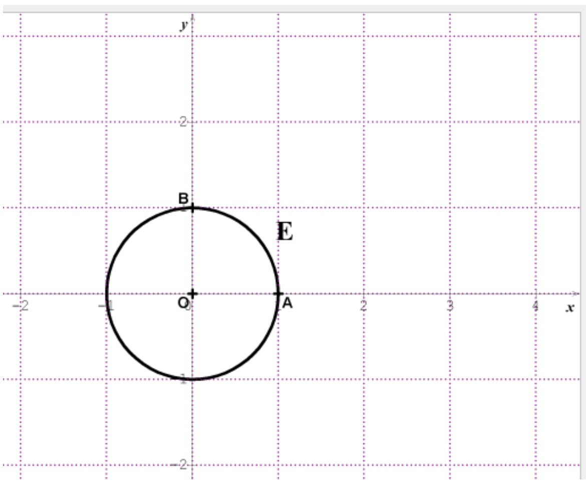
a.



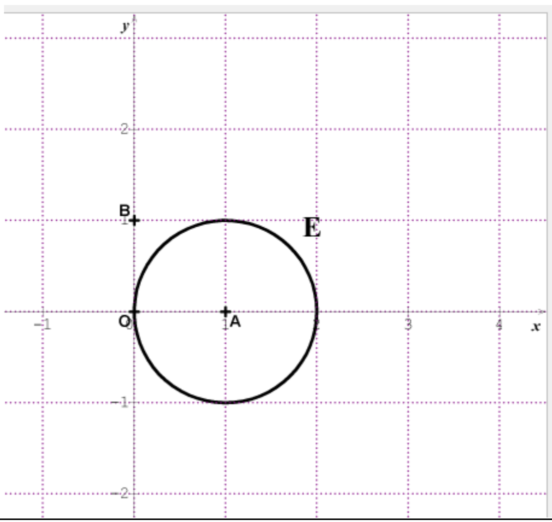
b.



c.



d.

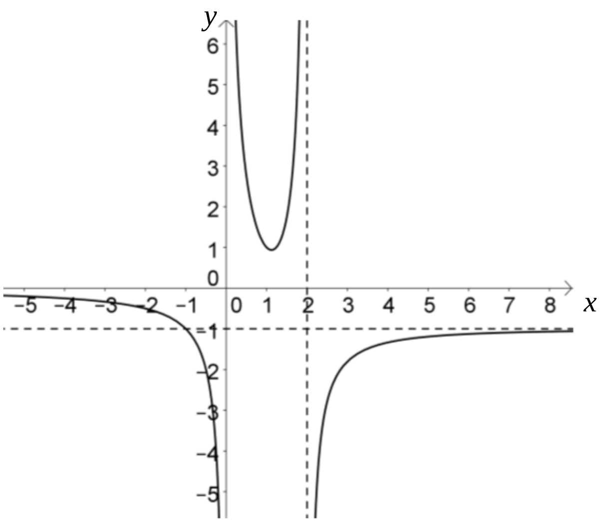


2. Considérons les deux nombres complexes $z_1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$ où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
Le produit $z_1 \times z_2$ est égal à :

a. $2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}$	**b.** $(1+\sqrt{3})(-1+\mathrm{i})$
c. $2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$	**d.** $1-\sqrt{3}+2\mathrm{i}$

3. Voici la représentation graphique d'une fonction f.
Cette courbe admet les quatre asymptotes suivantes :

- deux asymptotes horizontales d'équations respectives $y = -1$ et $y = 0$;
- deux asymptotes verticales d'équations respectives $x = 0$ et $x = 2$.



Choisissez la bonne égalité :

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$	**b.** $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$
c. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$	**d.** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

4. On considère l'équation différentielle $y' + 2y = 5$, où y désigne une fonction de la variable réelle x dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée notée y'. Une solution de cette équation est :

a. $x \longmapsto \frac{5-\mathrm{e}^{-2x}}{2}$	**b.** $x \longmapsto \mathrm{e}^{-2x} - 5$
c. $x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{2x}-5}{2}$	**d.** $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x} + 2{,}5$

Exercice 2 : (6 points).

L'efficacité énergétique (valorisation des déchets, efficacité des éclairages, domotique dans les habitations ...) devient une priorité pour les industriels, les collectivités locales et les usagers.
À l'échelle européenne, le marché des services énergétiques devrait croître de 5 % par an. En 2014, le fournisseur d'énergie ENERGIA a réalisé un chiffre d'affaires de 920 millions d'euros dans les services énergétiques.

- **Les résultats seront arrondis au million d'euros près** -

1. Déterminer le chiffre d'affaires que devrait réaliser le fournisseur ENERGIA dans les services énergétiques pour l'année 2015.

On suppose que dans les prochaines années, la tendance va se poursuivre.
Notons C_n le chiffre d'affaires, en million d'euros, réalisé par le fournisseur ENERGIA dans les services énergétiques pour l'année 2014 + n.

2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n.
En déduire la nature de la suite (C_n) et donner ses éléments caractéristiques.

3. Exprimer C_n en fonction de n.

4. a. Calculer la valeur du chiffre d'affaires en 2019.
b. Quel est le pourcentage d'augmentation du chiffre d'affaires de 2014 à 2019 ? On donnera le résultat sous la forme p %, où p est arrondi à 10^{-1}.

5. On veut déterminer à partir de quelle année le chiffre d'affaires du fournisseur ENERGIA réalisé dans les services énergétiques va doubler.

a. On considère l'algorithme ci-dessous. Recopier et compléter les lignes 8 et 13 afin que cet algorithme réponde à la question posée.

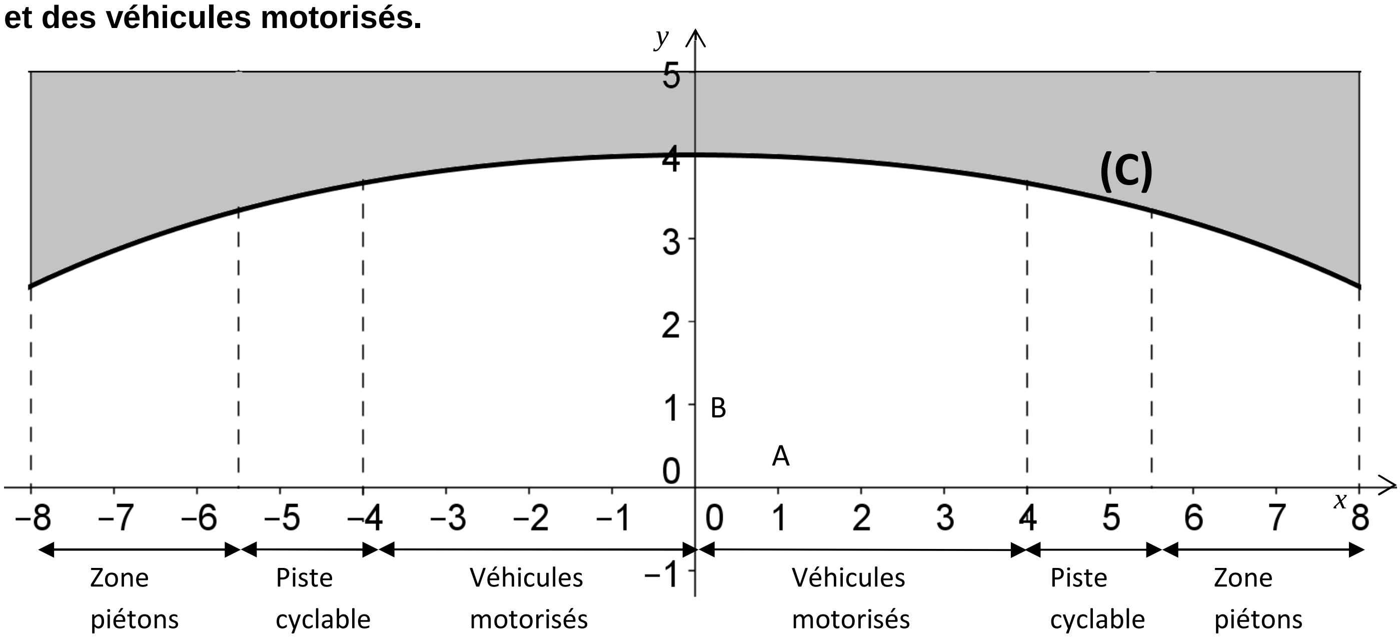
```
1/  Variables
2/      N : un nombre entier naturel
3/      C : un nombre réel
4/  Initialisation
5/      Affecter à N la valeur 0
6/      Affecter à C la valeur 920
7/  Traitement
8/      Tant que . . . . .
9/          Affecter à N  la valeur N +1
10/         Affecter à C la valeur C *1,05
11/     Fin Tant que
12/ Sortie
13/     Afficher . . . . .
```

b. En faisant tourner cet algorithme complété, déterminer l'année à partir de laquelle le chiffre d'affaires du fournisseur ENERGIA réalisé dans les services énergétiques dépassera les 1 840 millions d'euros.
c. Proposer une méthode plus directe pour répondre à la question précédente par le calcul.

6. Après avoir effectué une analyse du marché, on prévoit plutôt une hausse annuelle de 10 % du marché des services énergétiques à l'échelle européenne. Déterminer l'année à partir de laquelle le chiffre d'affaires va doubler.

Exercice 3 : (6 points).

Un pont à une seule arche d'une longueur de 16 m enjambe une route à double circulation.
La figure ci-dessous donne une vue de l'une des deux façades de ce pont (1 unité représente 1 mètre).
La partie supérieure du pont est à une hauteur de 5 m au-dessus de la route.
La partie de l'axe des abscisses comprise entre -8 et 8 représente la chaussée sur laquelle sont délimitées les zones de circulation des piétons, des cyclistes et des véhicules motorisés.



A/ <u>Étude de la fonction représentée par la courbe (C).</u>

Soit la fonction f définie, pour tout réel x de l'intervalle $[-8\ ;\ 8]$, par

$$f(x) = k - 0{,}5(\mathrm{e}^{0{,}2x} + \mathrm{e}^{-0{,}2x}) \text{ où } k \text{ désigne un entier naturel fixé.}$$

On note (C) sa courbe représentative, donnée ci-dessus dans le repère orthonormé (O, A, B).

1. Déterminer graphiquement $f(0)$.
En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $[-8\ ;\ 8]$:

$$f(x) = 5 - 0{,}5(\mathrm{e}^{0{,}2x} + \mathrm{e}^{-0{,}2x})$$

2. En tenant compte du fait que l'on doit laisser une hauteur de sécurité de 50 cm, quelle doit être la hauteur maximale exprimée en mètre d'un véhicule motorisé pour qu'il puisse passer sous le pont ? On arrondira le résultat à 10^{-1}.

3. Montrer que la fonction f', dérivée de la fonction f, est définie, pour tout réel x de l'intervalle $[-8\ ;\ 8]$, par $f'(x) = 0{,}1\mathrm{e}^{-0{,}2x}(1 - \mathrm{e}^{0{,}4x})$.

4. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[-8\ ;\ 8]$. En déduire le tableau de variation de f sur $[-8\ ;\ 8]$.

B/ Calculs d'aires.

La façade du pont est la partie grisée représentée sur la figure précédente.

1. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\mathrm{I} = \int_{-8}^{8}(\mathrm{e}^{0,2x} + \mathrm{e}^{-0,2x})\mathrm{d}x$.

2. Vérifier que l'aire de la façade exprimée en m^2 vaut $5(\mathrm{e}^{1,6} - \mathrm{e}^{-1,6})$.

3. On veut peindre les deux façades du pont. En déduire l'aire S exprimée en m² de la surface totale à peindre ; en donner une valeur en m² approchée à 10^{-2} près.

4. La peinture utilisée pour peindre les façades du pont est vendue par bidon de 5 litres.
Sachant que cette peinture a une propriété de recouvrement de 3 m² par litre, combien de bidons sont nécessaires pour recouvrir les deux faces de cette construction ?

Exercice 4 : (4 points).

Une entreprise achète du sucre et le revend après conditionnement à des grossistes pour le marché de la grande distribution.
Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

1. Une machine de l'usine conditionne des paquets de sucre en poudre de 1 kg.
La masse M en gramme d'un paquet est une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne m = 1000 et d'écart-type $\sigma = 7$.
   a. Calculer $P(995 \leq M \leq 1005)$.
   b. Un paquet est refusé si sa masse est inférieure à 990 grammes.
   Quelle est la probabilité pour qu'un paquet conditionné par cette machine soit refusé ?

Dans la suite de l'exercice, on arrondit à 0,08 la probabilité p pour qu'un paquet conditionné dans l'usine soit refusé, ainsi $p = 0,08$.
On s'intéresse au stock journalier de paquets conditionnés dans l'usine.

2. On prélève au hasard 100 paquets parmi le stock. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de paquets à rejeter dans cet échantillon.
   a. Quelle est la loi de probabilité de X ? On donnera ses paramètres.
   b. Quelle est la probabilité qu'exactement 3 paquets parmi ces 100 paquets soient refusés ?
   c. Calculer la probabilité que, parmi ces 100 paquets, 5 ou plus soient refusés.

3. On contrôle la masse d'un échantillon de 100 paquets de sucre dans le stock global de l'entreprise. Après contrôle, 10 paquets sont refusés.

Rappel : *Lorsque la proportion p dans la population est connue, l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % d'une fréquence obtenue sur un échantillon de taille n est :*

$$I = \left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,; p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].$$

L'échantillon est-il représentatif de la production de l'usine ? Justifier.